CLASE 4. Campos Vectoriales y Operadores Diferenciales

Opcional

Un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ es una función (continua) $\mathbf{F} : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Una línea de flujo (*línea de corriente* o también *curva integral*) para un campo vectorial $\mathbf{F}$ es una trayectoria $\sigma(t)$ que cumple $\sigma'(t) = \mathbf{F}(\sigma(t))$. De esta manera $\mathbf{F}$ define el *campo de velocidades* de las trayectorias. En lo que sigue supondremos que $\mathbf{F}$ es de clase $\mathcal{C}^1$.

Analíticamente, el problema de hallar una línea de flujo que pase por el punto $\mathbf{x}_0$ en $t = 0$, implica resolver la ecuación diferencial $\sigma'(t) = \mathbf{F}(\sigma(t))$, con condición inicial $\sigma(0) = \mathbf{x}_0$.

En $\mathbb{R}^3$, si denotamos $\mathbf{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ y $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ (coordenadas cartesianas) se obtiene el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = P(x(t), y(t), z(t)) \\ y'(t) = Q(x(t), y(t), z(t)) \\ z'(t) = R(x(t), y(t), z(t)) \end{cases}$$

con condiciones iniciales

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \\ z(0) = z_0. \end{cases}$$

Geométricamente, el problema de hallar una línea de flujo que pase por $\mathbf{x}_0$ es el de hallar una curva que al ser "*colocada*" en el campo vectorial, su vector tangente (a la curva) "coincida" con el campo vectorial, como se muestra en la Figura 1.

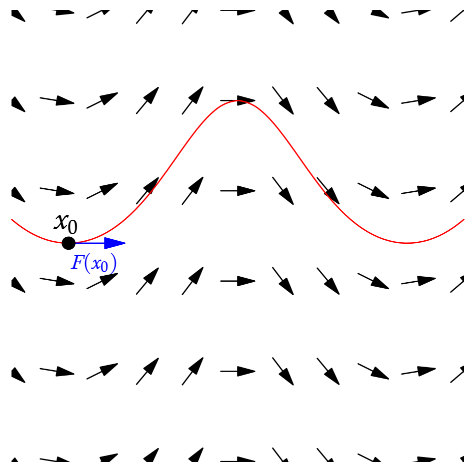

Figura 1: Líneas de Flujo de un campo vectorial.

El problema de valor inicial $\sigma'(t) = \mathbf{F}(\sigma(t))$, $\sigma(0) = \mathbf{x}_0$ es equivalente a la ecuación integral

$$\sigma(t) = \int_0^t \mathbf{F}(\sigma(t))\,\mathrm{d}t + \mathbf{x}_0.$$

En el caso $\mathbf{x}$ variable, la línea de flujo (en condiciones adecuadas) estaría dada por una función $\phi(\mathbf{x}, t)$ indicando la posición del punto en la línea de flujo que pasa por $\mathbf{x}$ después de transcurrido el tiempo t.

Luego, de $\dfrac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\phi(\mathbf{x}, t))$ y $\phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$ sería

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \mathbf{F}(\phi(\mathbf{x}, t))\,\mathrm{d}t + \mathbf{x}$$

y así la integral representa el flujo de $\mathbf{F}$.

Definición 4.1 (Rotor o Rotacional)**.** Consideremos un campo vectorial $\mathbf{F}$ de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$. Se define el rotor (o rotacional) de $\mathbf{F}$ como el campo vectorial de clase $\mathcal{C}$ dado por

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = (R_y - Q_z\ ,\ P_z - R_x\ ,\ Q_x - P_y).$$

Usando el símbolo del gradiente, ∇, dado por $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ y su interpretación como un *operador diferencial* $\Big($su acción sobre un campo escalar f es $\nabla f = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right) f =$

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$, el *gradiente* de f), se obtiene que

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z\,, P_z - R_x\,, Q_x - P_y).$$

Definición 4.2 (Divergencia)**.** La divergencia del campo vectorial $\mathbf{F}$ se define por

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Teorema 4.3. *Para cualquier campo escalar f de clase $\mathcal{C}^2$ se cumple que* $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = 0$*, es decir,* $\nabla \times \nabla f = 0$.

Prueba. La demostración es sencilla, basta calcular

$$\nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = (f_{yz} - f_{zy}\,, f_{zx} - f_{xz}\,, f_{yx} - f_{xy}) = 0,$$

ya que las derivadas cruzadas son iguales por ser f de clase $\mathcal{C}^2$. □

Teorema 4.4. *Para cualquier campo vectorial* $\mathbf{F}$ *de clase $\mathcal{C}^2$ se cumple que* $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = 0$*, es decir,* $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$.

Prueba. Hacemos $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ y calculamos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) &= \nabla \cdot (R_y - Q_z\,,\ P_z - R_x\,,\ Q_x - P_y) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(R_y - Q_z) + \frac{\partial}{\partial y}(P_z - R_x) + \frac{\partial}{\partial z}(Q_x - P_y) \\ &= R_{yx} - Q_{zx} + P_{zy} - R_{xy} + Q_{xz} - P_{yz} \\ &= 0, \end{aligned}$$

ya que las derivadas cruzadas son iguales (por ser $\mathbf{F}$ de clase $\mathcal{C}^2$). □

Teorema 4.5. *Sean f y g campos escalares de clase $\mathcal{C}^2$. Se cumple que* $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$.

Prueba. Para realizar la demostración de nuevo hay que realizar las operaciones indicadas:

$$\nabla f \times \nabla g = \begin{vmatrix} i & j & k \\ f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix} = (f_y g_z - f_z g_y\,, f_z g_x - f_x g_z\,, f_x g_y - f_y g_x).$$

Luego,

$$\operatorname{div}(\nabla f\times \nabla g) = \frac{\partial}{\partial x}(f_y g_z - f_z g_y) + \frac{\partial}{\partial y}(f_z g_x - f_x g_z) + \frac{\partial}{\partial z}(f_x g_y - f_y g_x).$$

Al calcular las derivadas de los productos y tomando en cuenta que las derivadas cruzadas son iguales (pues f y g son de clase $\mathcal{C}^2$) se obtiene que $\operatorname{div}(\nabla f\times \nabla g) = 0$. □

Algunas identidades sencillas en el análisis vectorial serían las siguientes: (f y g denotan campos escalares y **F** y **G** campos vectoriales)

(a) $\nabla(f+g) = \nabla(f) + \nabla(g)$.

(b) $\nabla(kf) = k\nabla(f)$, donde k es constante.

(c) $\nabla(fg) = f\nabla(g) + g\nabla(f)$.

(d) $\nabla(f/g) = \dfrac{g\nabla(f) - f\nabla(g)}{g^2}$ (teniendo cuidado de "*no dividir entre cero*").

(e) $\operatorname{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \operatorname{div}(\mathbf{F}) + \operatorname{div}(\mathbf{G})$.

(f) $\operatorname{rot}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \operatorname{rot}(\mathbf{F}) + \operatorname{rot}(\mathbf{G})$.

(g) $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f\operatorname{div}(\mathbf{F}) + \mathbf{F}\cdot\nabla f$.

(h) $\operatorname{rot}(f\mathbf{G}) = f\operatorname{rot}(\mathbf{G}) + \nabla f\times\mathbf{G}$.

Así por ejemplo, para probar (h), si $\mathbf{G} = (g_1, g_2, g_3)$, entonces $f\mathbf{G} = (fg_1, fg_2, fg_3)$. Luego

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(f\mathbf{G}) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ fg_1 & fg_2 & fg_3 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(fg_3) - \frac{\partial}{\partial z}(fg_2)\,,\ \frac{\partial}{\partial z}(fg_1) - \frac{\partial}{\partial x}(fg_3)\,,\ \frac{\partial}{\partial x}(fg_2) - \frac{\partial}{\partial y}(fg_1)\right) \\
&= f\left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}\,,\ \frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x}\,,\ \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y}\right) \\
&\qquad + \left(\frac{\partial f}{\partial y}g_3 - \frac{\partial f}{\partial z}g_2\,,\ \frac{\partial f}{\partial z}g_1 - \frac{\partial f}{\partial x}g_3\,,\ \frac{\partial f}{\partial x}g_2 - \frac{\partial f}{\partial y}g_1\right) \\
&= f\operatorname{rot}\mathbf{G} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ f_x & f_y & f_z \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} \\
&= f\operatorname{rot}\mathbf{G} + \nabla f\times\mathbf{G}.
\end{aligned}$$

***Observación* 4.6.** Si **F** representa el campo de velocidades de un fluido, la divergencia de **F** se puede interpretar como la tasa de expansión del fluido por unidad de volumen en la unidad de tiempo. Más adelante veremos esto de nuevo.